FI-002 10/07/20 /1/

§ Quantização de um campo escalar ($\hbar = 1$, $c = 1$)

Procedemos de maneira semelhante ao tratamento de quantização da radiação. Consideramos o campo de Klein-Gordon como um 'campo clássico', com densidade Lagrangiana, com ϕ real:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - m^2\phi^2\right\}$$

A eq. de Lagrange se escreve:

$$\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi)}\left[g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\delta^\alpha_\mu\partial_\nu\phi + g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\delta^\alpha_\nu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{\alpha\nu}\partial_\nu\phi + g^{\mu\alpha}\partial_\mu\phi\right] = \partial^\alpha\phi$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -2\, m^2\phi \times \frac{1}{2} = -m^2\phi$$

Resulta em total a eq. de Klein-Gordon:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi + m^2 \phi = 0 = (\Box + m^2)\phi$$

O momentum canônico conjugado $\pi(x)$ é definido como:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = \partial_0 \phi = \dot{\phi}$$

E obtemos a densidade Hamiltoniana como:

$$\mathcal{H} = \pi(\partial_0 \phi) - \mathcal{L}$$

$$= (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right].$$

Para o Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \geq 0,$$

que é definido positivo. O campo escalar não apresenta o problema das energias negativas da teoria de 1-partícula. A quantização é feita postulando as relações de comutação análogas a $[x, p] = i$, sempre a tempos iguais:

$$\left[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)\right] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left[\phi(x,t), \phi(x',t)\right] = 0 = \left[\pi(x,t), \pi(x',t)\right]$$

A quantização então força a interpretar o campo ϕ como um operador. Como o campo ϕ é real, o operador ϕ será hermitiano. O campo clássico é expandido em componentes de Fourier, de freqüências positivas e negativas:

$$\phi_{class} = \sum_{\vec{k}} \left[\varphi_k^{(+)}(x)\, a_k + \varphi_k^{(-)}(x)\, a_k^*\right]$$

e os coeficientes de Fourier são identificados com operadores de partículas, na forma:

(1) $$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a(k)\, e^{-ikx} + a^\dagger(k)\, e^{ikx}\right],$$

onde $\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2$ é o quadrado da energia relativística.

A medida $\dfrac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega_k}$ é escolhida pq é um invariante relativístico

Dem.

$$k^2 = k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

$$\omega_k^2 = m^2 + |\vec{k}|^2 = m^2 + (k^0)^2 - k^2$$

$$\Rightarrow \quad k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \omega_k^2$$

É evidente que

Klein-Gordon

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, 2\pi \, \delta(k^2 - m^2) \, \theta(k^0)$$

é invariante relativístico. Verificamos que

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta\left[(k^0)^2 - \omega_k^2\right]$$

$$= \frac{1}{2|k_0|} \left[\delta(k^0 - \omega_k) + \delta(k^0 + \omega_k)\right]$$

$$2\pi \, \delta(k^2 - m^2) \, \theta(k^0) = \frac{2\pi}{2\omega_k} \delta(k^0 - \omega_k)$$

integrando sobre k^0, obtemos

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \frac{1}{2|k_0|} \delta(k^0 - \omega_k) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k}$$

Verifica-se que ϕ é hermitiano. Para o momentum canônico:

$$\pi = \dot{\phi} \ ,$$

obtemos:

$$(2) \quad \pi(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[-i\omega_k a(k) e^{-ikx} + i\omega_k a^{+}(k) e^{ik\cdot x} \right]$$

que tbm é hermitiano. Usando (1) e (2), queremos resolver (a, a^{+}) em função de (ϕ, π).

Consideramos

$$\int d^3x\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \left\{ \omega_{k'} \phi(\vec{x},t) + i\pi(\vec{x},t) \right\} =$$

$$= \int d^3x\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ (\omega_{k'} + \omega_k) a(k) e^{-ik\cdot x} + \right.$$
$$\left. + (\omega_{k'} - \omega_k) a^{+}(k) e^{ikx} \right\} .$$

Fazemos a integração espacial:

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left\{ \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) a(k) e^{-i\omega_k t} (\omega_{k'} + \omega_k) + \right.$$
$$\left. + \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{k}) (\omega_{k'} - \omega_k) e^{i\omega_k t} a^{+}(k) \right\}$$

Como $\omega_{-k} = \omega_k$, obtemos:

$$= \frac{1}{\cancel{2\omega_{k'}}}\, a(k')\, e^{-i\omega_{k'} t}\, \cancel{2\omega_{k'}} = a(k)\, e^{-i\omega_k t}$$

Resultado:

$$a(k) = \int d^3x \; e^{+ik\cdot x} \left[\omega_k \phi(\vec{x},t) + i\,\pi(\vec{x},t)\right]$$

Da mesma forma:

$$a^{+}(k) = \int d^3x \; e^{-ik\cdot x} \left[\omega_k \phi(\vec{x},t) - i\,\pi(\vec{x},t)\right]$$

Agora podemos determinar a álgebra para os operadores de partículas.

$$\left[a(k), a^{+}(k')\right] = \int d^3x \int d^3y \; e^{ikx}\, e^{-ik'y} \;\times$$

$$\times \left[\omega_k \phi(\vec{x},t) + i\,\pi(\vec{x},t)\, ,\, \omega_{k'} \phi(\vec{y},t) - i\,\pi(\vec{y},t)\right]$$

$$= \int d^3x \int d^3y \; e^{ikx}\, e^{-ik'y} \;\times$$

$$\times \left\{ -i\omega_k (i)\, \delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x}) - i\omega_{k'} (i)\, \delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x}) \right\}$$

$$= \int d^3x \int d^3y \; (\omega_k + \omega_{k'})\, \delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x})\; e^{i(k-k')x}$$

$$= \int d^3x \, e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \, (\omega_k + \omega_{k'})$$

$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \, 2\omega_k$$

Note que $\omega_k^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$, ou seja $\vec{k}' = \vec{k} \Rightarrow$
$\omega_{k'} = \omega_k$

Resultado:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \, \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k})$$

Tbm podemos calcular

$$[a(k), a(k')] = \int d^3x \int d^3y \; e^{ikx} \, e^{-ik'y} \times$$
$$\left[\omega_k \phi(\vec{x},t) + i\Pi(\vec{x},t) , \; \omega_{k'} \phi(\vec{y},t) + i\Pi(\vec{y},t) \right]$$

o comutador é

$$i\omega_k \, i \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + \omega_{k'} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) =$$

$$= (\omega_{k'} - \omega_k) \, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

e integrando obtemos:

$$[a(k), a(k')] = 0 = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')]$$

Cód. 1726

Obtemos uma álgebra de bósons. O operador Hamiltoniano pode ser escrito em termo dos operadores de partículas

$$\nabla\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ i\vec{k}\, a(\vec{k}) e^{-ikx} - i\vec{k}\, a^\dagger(k) e^{ikx} \right\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{k}}{2\omega_k} \left\{ a(\vec{k}) e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right\}$$

$$\frac{1}{2}\int d^3x (\nabla\phi)^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \times \int d^3x \, (-\vec{k}\cdot\vec{k}')$$

$$\left\{ a(k)a(k') e^{-i(k+k')x} + a^\dagger(k) a^\dagger(k') e^{i(k+k')x} - \right.$$

$$\left. - a(k) a^\dagger(k') e^{-i(k-k')x} - a^\dagger(k) a(k') e^{i(k-k')x} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3k \int d^3k' \frac{(-\vec{k}\cdot\vec{k}')}{(2\pi)^3 4\omega_k \omega_{k'}} \times \left\{ a(k)a(k') e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}'+\vec{k}) \right.$$

$$+ a^\dagger(k) a^\dagger(k') e^{i(\omega_{k'}+\omega_k)t} \delta^{(3)}(\vec{k}'+\vec{k}) -$$

$$- a(k) a^\dagger(k') e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') -$$

$$\left. - a^\dagger(k) a(k') e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3k \, \frac{|\vec{k}|^2}{(2\pi)^3 4\omega_k^2} \left\{ a(k)a(-k)\, e^{-2i\omega_k t} + a^\dagger(k) a^\dagger(-k)\, e^{2i\omega_k t} \right\}$$

$$+$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^3k \, \frac{|\vec{k}|^2}{(2\pi)^3 4\omega_k^2} \left\{ a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k) \right\}$$

Agora calculamos

$$\frac{1}{2} \int d^3x \, \Pi^2 = \frac{1}{2} \iint \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6 (2\omega_k)(2\omega_{k'})} \times \int d^3x$$

$$\times \left\{ -\omega_k\omega_{k'}\, a(k)a(k')\, e^{-i(k+k')\cdot x} - \omega_k\omega_{k'}\, a^\dagger(k)a^\dagger(k')\, e^{i(k+k')\cdot x} \right.$$

$$\left. + \omega_k\omega_{k'}\, a(k)a^\dagger(k')\, e^{i(k'-k)\cdot x} + \omega_k\omega_{k'}\, a^\dagger(k)a(k')\, e^{i(k-k')x} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3k'}{2\omega_{k'}} \times \left\{ -\omega_k\omega_{k'}\, a(k)a(k')\, e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') - \right.$$

$$- \omega_k\omega_{k'}\, a^\dagger(k)a^\dagger(k')\, e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') +$$

$$+ \omega_k\omega_{k'}\, a(k)a^\dagger(k')\, e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') +$$

$$\left. + \omega_k\omega_{k'}\, a^\dagger(k)a(k')\, e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t} \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \right\}$$

integrando sobre $\vec{k}'$, obtemos:

$$\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 4\omega_k^2}\left\{-\omega_k^2\, a(k)a(-k)\, e^{-2i\omega_k t} - \right.$$
$$\left. -\omega_k^2\, a^\dagger(k)a^\dagger(-k)\, e^{2i\omega_k t}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k^2}{4\omega_k^2}\left[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)\right]$$

Falta calcular $\frac{1}{2}\int d^3x\; m^2\phi^2 =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \times \int d^3x \times m^2 \times$$
$$\times\left\{a(k)a(k')\, e^{-i(k+k')x} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')\, e^{i(k+k')x} + \right.$$
$$\left. + a(k)a^\dagger(k')\, e^{-i(k-k')x} + a^\dagger(k)a(k')\, e^{i(k-k')\cdot x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k^2}\left\{m^2 a(k)a(-k)\, e^{-2i\omega_k t} + m^2 a^\dagger(k)a^\dagger(-k)\, e^{2i\omega_k t}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k^2}\left\{m^2\left[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)\right]\right\}$$

Em total, obtemos para o Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left\{ \pi^2(x,t) + \left[\nabla\phi(x,t)\right]^2 + m^2\phi^2(x,t) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k^2}\underbrace{\left(m^2 + |\vec{k}|^2 - \omega_k^2\right)}_{0}\Big[a(k)a(-k)e^{-2i\omega_k t} + a^\dagger(k)a^\dagger(-k)e^{2i\omega_k t}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k^2}\Big(\omega_k^2 + \underbrace{|\vec{k}|^2 + m^2}_{2\omega_k^2}\Big)\Big[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)\Big]$$

$$\boxed{H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(\frac{\omega_k}{2}\right)\left[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)\right]}$$

Das relações de comutação, temos para $\vec{k}' = \vec{k}$:

$$\left[a(k), a^\dagger(k)\right] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0)$$

Definimos o operador número por:

$$(2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0) N(k) = a^\dagger(k)a(k)$$

$N(k)$ é um operador hermitiano.

$$\left[N(k), N(k')\right](2\pi)^6 4\omega_k\omega_{k'}\left[\delta^{(3)}(0)\right]^2 = \left[a^\dagger(k)a(k), a^\dagger(k')a(k')\right]$$

$$= \left[a^\dagger(k)a(k), a^\dagger(k')\right]a(k') + a^\dagger(k')\left[a^\dagger(k)a(k), a(k')\right]$$

$$= a^\dagger(k)\underbrace{\left[a(k), a^\dagger(k')\right]}_{(2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})}a(k') + a^\dagger(k')\underbrace{\left[a^\dagger(k), a(k')\right]}_{-(2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})}a(k)$$

$$= 0$$

Resulta: $\left[N(k), N(k')\right] = 0$

Os autoestados desses operadores podem ser usados como base:

$$N(k)\,|n(k)\rangle = n(k)\,|n(k)\rangle$$

(Base de número)

Temos que

$$(2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0)\left[N(k), a^\dagger(k)\right] = \left[a^\dagger(k)a(k), a^\dagger(k)\right]$$

$$= a^\dagger(k)\left[a(k), a^\dagger(k)\right] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0)\, a^\dagger(k)$$

$$\left[N(k), a^\dagger(k)\right] = a^\dagger(k)$$

$$\left[N(k), a(k)\right] = -a(k)$$

$$N(k)\left(a^\dagger(k)|n(k)\rangle\right) = \left[a^\dagger(k)N(k) + a^\dagger(k)\right]|n(k)\rangle$$

$$= (n(k)+1)\, a^\dagger(k)|n(k)\rangle$$

$$N(k)\left(a(k)|n(k)\rangle\right) = [n(k)-1]\left(a(k)|n(k)\rangle\right)$$

O estado fundamental ou vácuo $|0\rangle$ da teoria satisfaz:

$$a(k)|0\rangle = 0 \ ,$$

com $\langle 0|0\rangle = 1$. O estado $a^\dagger(k)|0\rangle$ contém uma partícula de energia ω_k e momentum $\vec{k}$. Porém, encontramos que $a^\dagger(k)|0\rangle$ não é normalizável:

$$\left(\langle 0|a(k)\right)\left(a^\dagger(k)|0\rangle\right) = \langle 0|\,a(k)a^\dagger(k)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\left\{\cancelto{0}{a^\dagger(k)a(k)} + (2\pi)^3 2\omega_k\,\delta^{(3)}(0)\right\}|0\rangle$$

$$= (2\pi)^3 2\omega_k\,\delta^{(3)}(0) \rightarrow \infty$$

Desde o ponto de vista físico, a função de onda de $a^\dagger(k)|0\rangle$ é uma onda plana, que não é normalizável.

Voltando para o Hamiltoniano:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\,\frac{\omega_k}{2}\left\{2a^\dagger(k)a(k) + (2\pi)^3 2\omega_k\,\delta^{(3)}(0)\right\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\,\omega_k\,a^\dagger(k)a(k) + \int d^3k\,\frac{\omega_k}{2}\,\delta^{(3)}(0)$$

e calculando a energia do vácuo

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\int d^3k\, \omega_k\, \delta^{(3)}(0) \longrightarrow \infty$$

Note que

$$\delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\, e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}}$$

e para $\vec{k}'=\vec{k}$:

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3} \xrightarrow[V\to\infty]{} \infty$$

Assim obtemos:

$$H = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \omega_k \left[N(k) + \tfrac{1}{2}\right]$$

A divergência de $\langle 0|H|0\rangle$ é 'ignorada', notando que a energia absoluta não pode ser medida. Assim, simplesmente redefinimos o zero da energia por.

$$H \longrightarrow H - \langle 0|H|0\rangle$$

Def. Ordem Normal, : :

$$:a(k)a^\dagger(k): \;=\; :a^\dagger(k)\,a(k): \;\equiv a^\dagger(k)\,a(k)$$

$$:H: = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\, \omega_k\, a^\dagger(k)a(k)$$

com

$$\langle 0 | :H: | 0 \rangle = 0.$$

De agora em diante, assumimos que o Hamiltoniano está ordenado normalmente.